NOTIZEN

Zur Theorie magnetohydrodynamischer Wellen

Von Egon Richter

Institut für Theoretische Physik der TH München

(Z. Naturforschg. **11 a**, 251 [1956]; eingegangen am 28. Januar 1956)

Die magnetohydrodynamischen Grundgleichungen setzen sich aus den hydrodynamischen Eulerschen Gleichungen und den Maxwellschen Gleichungen, in denen der Verschiebungsstrom vernachlässigt wird, zusammen. Durch diese Vernachlässigung des Verschiebungsstroms wird ein Übergang von Alfvénschen Wellen (Phasengeschwindigkeit $V = H_0 (4\pi \varrho_0)^{-1/2}$) zu elektromagnetischen Wellen von vornherein unmöglich.

Die durch den Verschiebungsstrom ergänzten magnetohydrodynamischen Grundgleichungen sind zwar nicht allgemein lösbar, aber für den Fall, daß die Feldgrößen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{v}$ nur von einer Koordinate (z. B. x-Koordinate) und der Zeit t abhängen, läßt sich eine Lösung der in üblicher Weise linearisierten Grundgleichungen angeben. Dabei kann auch die Leitfähigkeit σ, die Dielektrizitätskonstante ε, die Massendichte ϱ und das äußere, statische Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ von x abhängen. Unter Verwendung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes ergibt sich mit dem Ansatz $\mathfrak{E} = e^{i\omega t} \cdot \mathfrak{F}(x)$ für die Komponenten E_y, E_z die Wellengleichung (c.g.s.-System).

$$\frac{\mathrm{d}^2 F_l(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{a(x) - i\, b(x)}{g(x)} F_l(x) = 0\,, \quad (l = y, z) \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned} a(x) &= 4\pi H_0^2 \sigma^2 \varrho_0 c^2 + \varepsilon (H_0^4 \sigma^2 + \omega^2 \varrho_0^2 c^4)\,,\\ b(x) &= 4\pi \omega \varrho_0^2 \sigma c^4\,,\\ g(x) &= H_0^4 \sigma^2 + \omega^2 \varrho_0^2 c^4 \end{aligned} \tag{2}$$

und $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $\sigma = \sigma(x)$, $\varrho_0 = \varrho_0(x)$, $H_0 = H_0(x)$ ist.

Aus (2) folgt:

	$\varrho_0 \to 0$	$H_0 \to 0$	$\sigma \to 0$	$\sigma \to \infty$
$\dfrac{a - i\, b}{g}$	ε	$\varepsilon - i \dfrac{4\pi\sigma}{\omega}$	ε	$\dfrac{4\pi \varrho_0 c^2}{H_0^2} + \varepsilon$

Gl. (1) kann nach dem von Epstein [1] angegebenen und besonders von Rawer [2] auf die Ionosphäre angewandten Verfahren gelöst werden, wobei $(a - i\, b)/g$ auf bestimmte Funktionen beschränkt wird. Eine mögliche Funktion ist z. B.:

$$\frac{a(x) - i\, b(x)}{g(x)} = \frac{(a_1 - i\, b_1)/g_1 + (a_2 - i\, b_2)/g_2 \cdot e^{\varkappa x}}{1 + e^{\varkappa x}}\,, \tag{3}$$

wobei der Übergang von $(a_1 - i\, b_1)/g_1$ nach $(a_2 - i\, b_2)/g_2$ durch Wahl der Konstanten $\varkappa$ einem gegebenen Problem angepaßt werden kann. Das für diesen Funktionsverlauf errechenbare Reflexionsvermögen einer ebenen Welle ergibt sich mit $|b_1| \ll |a_1|$ und $|b_2| \ll |a_2|$ zu

$$R = \left|\frac{E_r}{E_e}\right|^2 = \frac{\mathfrak{Sin}^2[(\omega\, d/4\, c)\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)]}{\mathfrak{Sin}^2[(\omega\, d/4\, c)\,(\vartheta_2 + \vartheta_1)]}\,, \tag{4}$$

wobei $\vartheta^2 = a/g$ und d = Schichtdicke ist. — Als Schichtdicke wird der Abstand zweier Punkte x_1 und x_2 bezeichnet, an denen $\vartheta^2 - \vartheta_1^2$ bzw. $\vartheta_2^2 - \vartheta^2$ einen bestimmten kleinen Bruchteil von $\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2$ erreicht.

Setzen wir speziell $d \to 0$, $H_1 = H_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \to 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 \to \infty$ so ergibt sich aus (4) für R (ebenso für das Durchlaßvermögen) der von Roberts [3] und nach Umrechnung auf $\mathfrak{h}$ der von Ferraro [4] für diskontinuierlichen Übergang des ϱ_0 berechnete Wert. Die Herleitung dieses bekannten Ergebnisses aus Gl. (4) vermeidet aber die Schwierigkeit der bei diskontinuierlichem Übergang notwendigen Grenzbedingungen.

Aus dem magnetohydrodynamischen Energiesatz (mit berücksichtigtem Verschiebungsstrom) folgt für $\sigma \to \infty$ oder $\sigma \to 0$:

$$D + (\vartheta_2/\vartheta_1)\, R = 1\,, \tag{5}$$

wobei $\vartheta^2 = \varepsilon$ für $\sigma \to 0$

und $\vartheta^2 = 4\pi \varrho_0 c_2/H_0^2 + \varepsilon$ für $\sigma \to \infty$ ist.

Die Betrachtung *kontinuierlicher* Verläufe der Funktion $a(x)/g(x)$ von einem konstanten Wert a_1/g_1 zu einem anderen konstanten Wert a_2/g_2, entsprechend Gl. (3), ist astrophysikalischen Problemen gut angepaßt.

Bei der Anwendung auf bestimmte Probleme können die konstanten Werte a_1/g_1, a_2/g_2 aus der von Schlüter [5] abgeleiteten Dispersionsformel berechnet werden, in die das Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$, die Teilchendichte N, die Stoßfrequenz γ sowie die Kreisfrequenz ω eingeht. Mit Hilfe dieser Dispersionsformel läßt sich außerdem $\sigma = \sigma(N, H_0, \gamma, \omega)$ aus einer quadratischen und $\varepsilon = \varepsilon(N, H_0, \gamma, \sigma, \omega)$ aus einer linearen Gleichung bestimmen.

Beispielsweise ist beim Übergang der Funktion $(a - i\, b)/g$ vom Sonneninneren zur Sonnenkorona für $\omega < 1\ \mathrm{sec}^{-1}$ stets $|b| \ll |a|$ erfüllt, so daß Gl. (4) anwendbar ist, die in diesem Fall die vollständige Reflexion aller Wellen mit $\omega < 1\ \mathrm{sec}^{-1}$ ergibt.

Bestimmt man $\sigma = \sigma(\omega)$ und $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ für mittlere Werte N, H_0 und γ der Korona, so findet sich nur ein sehr schmaler Frequenzbereich, für den $|b| \ll |a|$ nicht erfüllt ist. Daraus folgt, daß in der Korona mit beiden σ- und ε-Werten die Welle

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \exp[i\, \omega\, (t \pm \vartheta\, x/c)]$$

für fast alle ω ungedämpft ist.

Eine ausführlichere Darstellung erfolgt in einer späteren Veröffentlichung.

Herrn Prof. Dr. G. Hettner, sowie Herrn Doz. Dr. A. Haug und Herrn Dr. E. Fick danke ich für zahlreiche Ratschläge und Diskussionen. — Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Gewährung eines Forschungsstipendiums zur Durchführung dieser Arbeit sehr dankbar.

[1] P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash. **16**, 627 [1930].
[2] K. Rawer, Ann. Phys., Lpz. **35**, 385 [1939].
[3] P. H. Roberts, Astrophys. J. **121**, 720 [1955].
[4] V. C. A. Ferraro, Astrophys. J. **119**, 393 [1954].
[5] A. Schlüter, Ann. Phys., Lpz. **10**, 418 [1952].